香港資優教育學苑
The Hong Kong Academy for Gifted Education

International Mathematical Olympiad
Preliminary Selection Contest – Hong Kong 2015

國際數學奧林匹克 — 香港選拔賽初賽 2015

23 May 2015 (Saturday)
2015 年 5 月 23 日（星期六）

Question Book 問題簿

Instructions to Contestants:
考生須知：

1. The contest comprises a 3 hours written test.
   比賽以筆試形式進行，限時三小時。

2. Questions are in bilingual versions. Answer all questions.
   題目中英對照。全卷題目均須作答。

3. Put your answers on the answer sheet.
   請將答案寫在答題紙上。

4. The use of calculators is NOT allowed.
   不可使用計算機。

5. Measuring instruments like rulers, compasses, etc. can be used.
   直尺、圓規及其它量度工具可作輔助之用。

Co-organised by The Hong Kong Academy for Gifted Education,
the Gifted Education Section of the Education Bureau and
International Mathematical Olympiad Hong Kong Committee
香港資優教育學苑、教育局資優教育組及國際數學奧林匹克香港委員會合辦

1. There are 12 lamps, initially all off, each of which comes with a switch. When a switch is pressed, a lamp which is off will be turned on, and a lamp which is on will be turned off. Now one is allowed to press exactly 5 different switches in each round. What is the minimum number of rounds needed so that all lamps will be turned on? (1 mark)

現有 12 盞燈，起初時都是關掉的。每盞燈均有一個按鈕，每次按下按鈕會使關掉的燈亮起，或使亮起的燈關掉。現容許每次按下剛好 5 個不同的按鈕，則最少經過幾次才可使所有燈亮起？ （1 分）

2. Let $ABCD$ be a square of side length 1234. E is a point on CD such that $CEFG$ is a square of side length 567 with F, G outside $ABCD$. The circumcircle of ΔACF meets BC again at H. Find CH. (1 mark)

設 $ABCD$ 是邊長為 1234 的正方形。E 是 CD 上的一點，使得 $CEFG$ 是正方形，其邊長為 567，且 F、G 均位於 $ABCD$ 外。ΔACF 的外接圓與 BC 再次相交於 H。求 CH。 （1 分）

3. In ΔABC, $\angle A = 54°$ and $\angle C = 24°$. P is a point on AC such that $AP = BC$. Find $\angle CBP$. (1 mark)

在 ΔABC 中，$\angle A = 54°$ 及 $\angle C = 24°$。P 是 AC 上的一點，使得 $AP = BC$。求 $\angle CBP$。 （1 分）

4. Find the remainder when $19^{17^{15^{\cdot^{\cdot^{3^1}}}}}$ is divided by 100. (1 mark)

求當 $19^{17^{15^{\cdot^{\cdot^{3^1}}}}}$ 除以 100 時的餘數。 （1 分）

5. $ABCD$ is a trapezium with AB // CD, $AB = 42$, $BC = 20$ and $DA = 15$. P is a point on AB, and a circle with centre P is tangent to both BC and AD. Find $AP \times PB$. (1 mark)

$ABCD$ 是梯形，其中 AB // CD，$AB = 42$、$BC = 20$ 及 $DA = 15$。P 是 AB 上的一點，且一個以 P 為圓心的圓同時與 BC 和 AD 相切。求 $AP \times PB$。 （1 分）

6. Let a and b be integers. If $a+b$ is a root of the equation $x^2+ax+b=0$, find the smallest possible value of ab. (1 mark)

設 a、b 為整數。若 $a+b$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的一個根，求 ab 的最小可能值。 （1 分）

7. Let $f(x)=\frac{15}{x+1}+\frac{16}{x^2+1}-\frac{17}{x^3+1}$. Find the value of

$$f(\tan 15°)+f(\tan 30°)+f(\tan 45°)+f(\tan 60°)+f(\tan 75°).$$ (1 mark)

設 $f(x)=\frac{15}{x+1}+\frac{16}{x^2+1}-\frac{17}{x^3+1}$。求下式的值：

$$f(\tan 15°)+f(\tan 30°)+f(\tan 45°)+f(\tan 60°)+f(\tan 75°)$$ （1 分）

8. $ABCD$ is a trapezium with $AB \,//\, CD$. M and N are the mid-points of AB and CD respectively. If $AC = 6$, $BD = 8$ and $MN = 4$, find the area of $ABCD$. (1 mark)

$ABCD$ 是梯形，其中 $AB \,//\, CD$。M 和 N 分別是 AB 和 CD 的中點。若 $AC = 6$、 $BD = 8$ 及 $MN = 4$，求 $ABCD$ 的面積。 （1 分）

9. Let k be an integer. If the equation $kx^2 + (4k-2)x + (4k-7) = 0$ has an integral root, find the sum of all possible values of k. (1 mark)

設 k 為整數。若方程 $kx^2 + (4k-2)x + (4k-7) = 0$ 有整數根，求 k 的所有可能值之和。 （1 分）

10. ΔABC has area 1 and has $AB > AC$. The internal bisector of $\angle A$ meets BC at D, and $\Delta DBC' \sim \Delta ABC$ where C' is the image of C upon reflection across AD. When the perimeter of ΔABC is minimised, find the length of AB. (1 mark)

ΔABC 的面積是 1，其中 $AB > AC$。$\angle A$ 的內角平分線交 BC 於 D，且 $\Delta DBC' \sim \Delta ABC$，其中 C' 是 C 點沿 AD 反射的影像。當 ΔABC 的周界達至最小值時，求 AB 的長度。 （1 分）

11. Let n be a positive integer. If the two numbers $(n+1)(2n+15)$ and $n(n+5)$ have exactly the same prime factors, find the greatest possible value of n. (2 marks)

設 n 為正整數。若 $(n+1)(2n+15)$ 和 $n(n+5)$ 兩數的質因數完全相同，求 n 的最大可能值。 （2 分）

12. Let $f(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ and $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. If a, b, c, d are the four roots to the equation $g(x) = 0$, find the value of $f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$. (2 marks)

設 $f(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ 及 $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$。若 a、b、c、d 是方程 $g(x) = 0$ 的四個根，求 $f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$ 的值。 （2 分）

13. Let k be a real number such that $-1 < k < 1$. The straight line $y = x + k$ meets the curve $y = 1 - x^2$ at A and B. If C denotes the point $(1, 0)$, find the greatest possible area of ΔABC. (2 marks)

設 k 為滿足 $-1 < k < 1$ 的實數。直線 $y = x + k$ 與曲線 $y = 1 - x^2$ 相交於 A 和 B。若 C 表示點 $(1, 0)$，求 ΔABC 的面積的最大可能值。 （2 分）

14. The following is a question in a mathematics test. How many different possible correct answers are there to the question?

> "In each box below fill in a positive integer not exceeding 11 (repetition is allowed) so that the statement is true: $\square \times \square + \square \times \square + 10$ is a multiple of 11." (2 marks)

某次數學測驗的一道題如下。這題有多少個不同的正確答案？

> 「在以下每個空格中填上一個不超過 11 的正整數（可重複），使命題成立：$\square \times \square + \square \times \square + 10$ 是 11 的倍數。」 （2 分）

15. Let $[x]$ denote the greatest integer less than or equal to x. Find the last seven digits (from left to right) of the number $\left[\dfrac{10^{2016}}{10^{672}+2015}\right]$. (2 marks)

設 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。求 $\left[\dfrac{10^{2016}}{10^{672}+2015}\right]$（從左至右）的最後七位數字。（2 分）

16. An arithmetic sequence with 10 terms has common difference d. If the absolute value of each term is a prime number, find the smallest possible value of d. (2 marks)

某個有 10 項的等差數列的公差為 d。若每項的絕對值均為質數，求 d 的最小可能值。（2 分）

17. 12 children stand on the circumference of a circle so that the distance between any two adjacent children is the same. The teacher then put on a red hat or a blue hat for each child, so that whenever some children's positions form a regular polygon then their hats are not all of the same colour. In how many different ways can the teacher put on hats for the children? (2 marks)

12 名小朋友分別站在一個圓的圓周上，使任意兩名相鄰的小朋友之間的距離均相等。然後，老師給每位小朋友戴上一頂紅色或藍色的帽子，使得沒有戴上相同顏色帽子的小朋友所站立的位置成一正多邊形。那麼，老師有多少種不同的方法給學生戴帽子？（2 分）

18. Let $f(x)$ be a polynomial of degree 5. If $f(1)=0$, $f(3)=1$, $f(9)=2$, $f(27)=3$, $f(81)=4$ and $f(243)=5$, find the coefficient of x in $f(x)$. (2 marks)

設 $f(x)$ 為五次多項式。若 $f(1)=0$、$f(3)=1$、$f(9)=2$、$f(27)=3$、$f(81)=4$ 及 $f(243)=5$，求 $f(x)$ 中 x 的系數。（2 分）

19. Let $a_1=\dfrac{2}{3}$ and $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4}+\sqrt{\dfrac{24a_n+9}{256}}-\dfrac{9}{48}$ for all positive integers n. Find the value of $a_1+a_2+a_3+\cdots$. (2 marks)

設 $a_1=\dfrac{2}{3}$，且對任意正整數 n，皆有 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4}+\sqrt{\dfrac{24a_n+9}{256}}-\dfrac{9}{48}$。求 $a_1+a_2+a_3+\cdots$ 的值。（2 分）

20. Eight couples attend a gathering. They are to be divided into four groups so that each group consist of two men and two women, and that no man may be in the same group as his wife. How many different ways of grouping are there? (2 marks)

某次聚會有八對夫婦參加。現要把他們分成四組，使得每組均由兩男兩女組成，且各人均不得與自己的配偶同組。那麼，共有多少種不同的分組方法？（2 分）

– End of Paper – 全卷完 –